

11 класс

Задача 1. Три завода

Максимизирующая прибыль фирма владеет тремя заводами, на которых она может производить товар X. Функции предельных издержек производства товара X (выраженных в долларах) для этих заводов имеют следующий вид:

$$\text{завод А: } MC_A = \frac{20}{2+8q_A},$$

$$\text{завод В: } MC_B = 10 + \sin(0,5 * q_B),$$

$$\text{завод С: } MC_C = 10 + 0,5 * q_C.$$

q_A, q_B, q_C — выпуски товара X на заводах А, В и С соответственно.

Фирма экспортирует всю свою продукцию на мировой рынок. Мировая цена одной единицы товара X равна 10 долларам. В соответствии с действующей в настоящее время системой экспортных квот экспорт фирмы не может превышать 50 единиц продукции.

Определите, сколько всего продукции будет производить фирма, и каков выпуск каждого завода.

Ответ: Суммарный выпуск фирмы: 50.

Выпуск завода А: 50.

Выпуск завода В: 0.

Выпуск завода С: 0.

Решение:

Утверждение 1. На первом заводе предельные издержки при любом положительном выпуске меньше, чем на втором и третьем. Поэтому все производим на третьем.

Утверждение 2. На первом заводе при любом положительном объеме выпуска предельные издержки меньше, чем цена. Значит, производим максимально возможный объем выпуска.

Задача 2. Кому планшет?

Фирма «АВС» является единственным продавцом инновационных планшетных компьютеров, которые она разработала благодаря содействию фонда РОСНАНО. Первым городом, в котором фирма реализует свою экспериментальную продукцию, стал небольшой город N. Спрос на этот товар в городе предъявляют 8 человек. Любой из них хотел бы приобрести один планшет. Максимальная цена, которую каждый из потребителей готов отдать за покупку, указана в таблице.

Покупатель	Максимальная цена (долл.)
Артем	800
Борис	700
Владимир	600
Галина	500
Дмитрий	1200

Евгений	1000
Жан	800
Зинаида	600

Зависимость общих издержек фирмы (в долларах) от ее объема выпуска (в штуках) имеет вид: $TC = 50q^2 + 50q$. Число произведенных планшетов может быть только целым.

Фирма назначает единую цену на свою продукцию P долларов за единицу товара. Также фирма предоставляет скидку каждому студенту в размере S долларов. Артем, Борис, Владимир и Галина — студенты. Остальные четыре потенциальных покупателя студентами не являются.

(а) Какие значения P и S следует выбрать фирме для того, чтобы ее прибыль была максимальной?

(б) Чему равна максимальная прибыль фирмы?

Решение:

Предельные издержки фирмы равны

$$MC(q) = TC(q) - TC(q-1) = 50q^2 + 50q - 50(q-1)^2 - 50(q-1) = 100q$$

Таблица 1. Предельный доход от продажи товара студентам

P-S	Q	TR	MR
800	1	800	800
700	2	1400	600
600	3	1800	400
500	4	2000	200

Таблица 2. Предельный доход от продажи товара НЕ студентам

P	Q	TR	MR
1200	1	1200	1200
1000	2	2000	800
800	3	2400	400
600	4	2400	0

Таблица 3. Сопоставление суммарного предельного дохода и предельных издержек

Q	MC	MR
1	100	1200 (не студент)
2	200	800 (студент)
3	300	800 (не студент)
4	400	600 (студент)
1	500	400 (студент)
2	600	400 (не студент)
3	700	200 (студент)
4	800	0 (не студент)

Предельные издержки строго возрастают, предельный доход не возрастает. Поэтому следует увеличивать объем выпуска до тех пор, пока выполняется условие $MR \geq MC$.

Следовательно, как видно из таблицы 3, следует продать 4 единицы товара (2 студентам и 2 не студентам).

Чтобы продать 2 единицы товара не студентам следует установить цену 1000 (см. таблицу 2).

Чтобы продать 2 единицы товара студентам, следует установить цену с учетом скидки равную 700 (см. таблицу 1).

Таким образом, $P=1000$, $P-S=700$. Отсюда получаем, что величина скидки $S=300$.

Прибыль фирмы равна:

$$\begin{aligned} TR - TC &= 1000 * 2 + 700 * 2 - (50 * 4^2 + 50 * 4) = \\ &= 3400 - 1000 = 2400 \end{aligned}$$

Ответ:

$$P=1000$$

$$S=300$$

Максимальная прибыль равна 2400

Задача 3. Шпионаж

На рынке товара А действуют две фирмы: «Альфа» и «Бета». Каждое утро фирмы объявляют цену на свою продукцию и далее в течение дня ее уже не меняют. Их продукция совершенно одинаковая, так что потребители покупают ее у той фирмы, которая назначит более низкую цену (если же цены совпадают, то потребители покупают половину продукции у одной фирмы, а половину – у другой). Ежедневный рыночный спрос на товар А имеет вид: $Q = 40 - 2P$, где P – цена продукции в золотых монетах, цена может быть только целым числом.

Фирме «Альфа» производство каждой единицы продукции обходится в 4 золотых монеты. Этой фирме удалось внедрить в фирму «Бета» шпиона. Сегодня утром шпион сообщил, что фирма «Бета» собирается назначить цену P_b . Для каждого целого значения P_b укажите, какую цену на свою продукцию следует установить фирме «Альфа», чтобы получить наибольшую прибыль (если при некоторых значениях P_b ответов несколько, то перечислите их все).

Решение:

Если бы фирма «Альфа» была монополистом, то ее прибыль была бы максимальна при цене, равной 12. Этот результат можно получить, если решить стандартную задачу максимизации прибыли фирмой-монополистом. Следовательно, если фирма «Бета» установит любую цену выше 12, то фирме «Альфа» следует устанавливать цену равную 12.

Если фирма «Бета» установит цену, равную 12, то выпуск фирмы «Альфа» будет следующим образом зависеть от ее цены:

$$q_A = \begin{cases} 40 - 2P_A, & P_A < 12 \\ 0,5 * (40 - 2 * 12), & P_A = 12 \\ 0, & P_A > 12 \end{cases}$$

Следовательно, ее прибыль в зависимости от установленной цены имеет вид:

$$PR_A = \begin{cases} (40 - 2P_A)P_A - 4 * (40 - 2P_A), & P_A < 12 \\ 8 * 12 - 4 * 12, & P_A = 12 \\ 0, & P_A > 12 \end{cases}$$

С учетом того, что по условию цена может быть только целой, получаем, что в этом случае прибыль фирмы А максимальна при цене равной 11.

Аналогично рассматриваются случаи, когда $P_b = 11, 10, \dots, 7, 6$. В каждом из них получается, что прибыль фирмы «Альфа» максимальна при цене, равной $(P_b - 1)$.

Если $P_b = 5$, то прибыль фирма «Альфа» положительна только при условии, что она также назначит цену, равную пяти. Если фирма «Альфа» назначит цену выше пяти, то ее прибыль будет равна нулю, так как у нее никто ничего не купит. Если назначить цену, равную четырем, то цена будет совпадать со средними издержками и, следовательно, прибыль фирмы окажется равна нулю. Цену ниже четырех назначать бессмысленно, так как в этом случае она окажется ниже средних издержек. Таким образом, при $P_b = 5$ фирме «Альфа» также следует выбрать цену, равную 5.

Если $P_b = 4$, то прибыль фирма «Альфа» равна нулю при условии, что она назначит цену равную четырем или больше четырех. Если фирма «Альфа» назначит цену выше четырех, то ее прибыль будет равна нулю, так как у нее никто ничего не купит. Если назначить цену, равную четырем, то цена будет совпадать со средними издержками и, следовательно, прибыль фирмы окажется равна нулю. Цену ниже четырех назначать бессмысленно, так как в этом случае она окажется ниже средних издержек. Таким образом, при $P_b = 5$ прибыль фирмы «Альфа» максимальна (и равна нулю) при ценах 4, 5, 6 ...

Если $P_b = 3$, то прибыль фирма «Альфа» равна нулю при условии, что она назначит цену больше трех (в этом случае у нее никто ничего не купит), и отрицательна при цене, равной трем или меньше трех (так как в этом случае ее выпуск будет положителен, а цена будет ниже средних издержек). Аналогично для случаев $P_b = 2, P_b = 1, P_b = 0$.

Суммируя все, сказанное выше, получаем ответ.

Ответ:

$$\begin{aligned} \text{Если } P_b > 12, & \quad \text{то } P_A = 12, \\ \text{если } P_b \in [6, 12], & \quad \text{то } P_A = P_b - 1, \\ \text{если } P_b = 5, & \quad \text{то } P_A = 5, \\ \text{если } P_b = 4, & \quad \text{то } P_A \geq 4, \\ \text{если } P_b \in [0, 3], & \quad \text{то } P_A > P_b. \end{aligned}$$

Задача 4. Законотворчество

Государство рассматривает законопроект, состоящий из двух актов: А и В. Оба законодательных акта не являются взаимоисключающими, так что возможна ситуация введения или отклонения обоих актов.

Сначала государственная дума решает, пропускать ли законопроект, и если пропускать, то какие именно законодательные акты в него включать (только А, только В или оба). После этого президент или подписывает внесенный думой законопроект, или отклоняет.

При этом если дума внесла в законопроект оба законодательных акта, то президент не может подписывать их по отдельности: он либо принимает законопроект целиком, либо отклоняет его также целиком.

Предпочтения президента устроены следующим образом: больше всего ему понравится ситуация, когда принят только акт В. Чуть хуже ситуация, когда приняты оба акта. Еще хуже – когда не принят ни один из актов. Наконец, наименее предпочтительной для президента является ситуация, когда принят только акт А.

Предпочтения депутатов думы устроены так: больше всего им понравится, если будет принят только акт А. Чуть хуже ситуация когда приняты оба акта. Еще хуже – когда не принят ни один из актов. Наконец, наименее предпочтительной для депутатов думы является ситуация, когда принят только акт В.

Депутаты думы и президент знают о предпочтениях друг друга. Каждый из них действует таким образом, чтобы в результате всей описанной процедуры добиться наиболее благоприятного для себя исхода.

- (а) Какие из актов А и В будут приняты? Формально обоснуйте свой ответ.
- (б) Пусть теперь, если дума внесла в законопроект оба законодательных акта, то президент может принимать или отклонять их не только вместе, но и по отдельности. Какие из актов будут приняты в этом случае?
- (в) Выиграет ли президент в результате подобного расширения собственных полномочий?

Ответ:

- (а) будут приняты оба акта
- (б) не будет принят ни один из актов
- (в) президент проиграет от расширения полномочий

Решение:

(а) Наиболее предпочтительный для думы вариант президент отклонит. Поэтому думе стоит попробовать второй по предпочтительности вариант: предложить оба акта. С этим президент согласится, так как для него лучше оба акта, чем ни одного. В результате **будут приняты оба акта**.

(б) Если дума внесет оба акта или только акт В, то в итоге президент подпишет только акт В. Но это самый плохой для думы вариант. Поэтому она либо не внесет ничего, либо внесет только акт А (который будет отклонен президентом). В результате **ни один из актов не будет принят**.

(в) Президент проиграет от расширения своих полномочий.