



## **Задания ОЧ-2014 для 11 класса**

### **Задание 1. SuperOil**

Общие издержки нефтедобывающей компании SuperOil, измеренные в долларах, описываются уравнением  $TC = q^5 - 20q^3 + 197q$ , где  $q$  — количество баррелей нефти, добываемой компанией. Всю нефть компания поставляет на экспорт. Компания выбирает объем выпуска таким образом, чтобы максимизировать свою прибыль. SuperOil занимает небольшую долю мирового рынка, поэтому не может влиять на сложившуюся цену.

В настоящий момент на мировом рынке сложилась цена 86 долларов за баррель нефти. Правительство страны, в которой производит свою продукцию компания SuperOil, не удовлетворено объемом продаж компании по этой цене. Правительство решает назначить потоварную субсидию для SuperOil, выплачиваемую за каждый баррель проданной нефти, чтобы стимулировать компанию увеличить выпуск по меньшей мере на 3 барреля.

Укажите минимальный размер субсидии, который позволит правительству достичь своей цели.

#### **Решение:**

Средние переменные издержки фирмы имеют вид:

$$AVC = q^4 - 20q^2 + 197 = (q^2 - 10)^2 + 97,$$

Ясно, что минимальное значение этих издержек равно 97, а значит минимальная цена, по которой фирма согласится хоть что-то производить, равна 97 долларам. Таким образом, по текущей цене 86 долларов объем выпуска фирмы равен нулю. Чтобы объем выпуска смог стать положительным, фирме следует выплачивать субсидию в размере не менее  $(97 - 86) = 11$  долларов. При меньшей субсидии оптимальный выпуск будет по-прежнему равен нулю, так как цена (даже с учетом субсидии) будет меньше минимума  $AVC$ .

При субсидии в 11 долларов объем выпуска фирмы составит  $q = \sqrt{10} > 3$ , следовательно, этой субсидии достаточно, чтобы достичь цели правительства.

Ответ: 11 долларов.

### **Задание 2. Пароходы**

Фирма *Паровой гигант* является монопольным производителем пароходов. У фирмы есть семь потенциальных покупателей, каждый из которых раздумывает над покупкой одного парохода. Максимальная цена, которую первый покупатель согласен заплатить за пароход, составляет 210 тыс. дублонов. Второй покупатель согласен заплатить за пароход не более 180 тыс. дублонов. Третий — не более 160 тыс. дублонов. Четвертый — не более 140 тыс. дублонов. Пятый — не более 120 тыс. дублонов.

Шестой — не более 100 тыс. дублонов. Наконец, седьмой согласен заплатить за пароход максимум 80 тыс. дублонов.

Фирма располагает заводом по производству пароходов, общие издержки которого следующим образом зависят от объема производства:

Количество произведенных пароходов	0	1	2	3	4	5	6	7
Общие издержки (в тыс. дублонов)	0	20	80	170	300	450	600	750

Фирма обязана устанавливать одинаковую цену для всех покупателей.

**(а)** Какую цену следует установить фирме и сколько пароходов произвести для того, чтобы получить максимальную прибыль? Чему равна эта максимальная прибыль?

**(б)** Теперь у фирмы *Паровой гигант* появилась возможность арендовать второй завод. Издержки на втором заводе следующим образом зависят от объема производства:

Количество произведенных пароходов	0	1	2	3	4	5	6	7
Общие издержки (в тыс. дублонов)	0	10	60	160	260	360	460	560

Фирма может производить часть кораблей на первом заводе, часть — на втором, в любой комбинации на свое усмотрение. Какую максимальную цену согласится заплатить фирма *Паровой гигант* за аренду второго завода?

**Решение:**

(а) Представим прибыль компании, которую она может получить при выборе разных объемов выпуска, в виде сводной таблицы:

Количество	Общие издержки	Цена	Выручка= =цена*количество	Прибыль= =выручка- издержки
1	20	210	210	190
2	80	180	360	280
3	170	160	480	310
4	300	140	560	260
5	450	120	600	150
6	600	100	600	0
7	750	80	560	-190

Из таблицы видно, что максимальная прибыль равна 310 тыс. дублонов. Она достигается при объеме выпуска, равном 3 пароходам, и цене в 160 тысяч дублонов за один пароход.

(б) Посмотрим, какую прибыль может получить компания, если она использует два завода.

При этом отметим, что первый пароход в этом случае следует производить на втором заводе, так как издержки производства первой единицы продукции на этом заводе меньше ( $10 < 20$ ).

При производстве двух пароходов оптимально производить один пароход на первом заводе и один — на втором, так как в этом случае суммарные затраты составят  $10 + 20 = 30$  (в то время, как если оба парохода производить на одном заводе, общие издержки будут или 60, или 80, в зависимости от того, на каком из заводов осуществляется производство).

По аналогии легко понять, что при производстве трех пароходов следует производить 1 пароход на первом заводе и два — на втором. При этом издержки составят  $20 + 60 = 80$ . И так далее.

Теперь представим прибыль компании, которую она может получить при выборе разных объемов выпуска, в виде сводной таблицы:

Количество	Общие издержки	Цена	Выручка= =цена*количество	Прибыль= =выручка- издержки
1	10	210	210	200
2	30	180	360	330
3	80	160	480	400
4	140	140	560	420
5	230	120	600	370
6	330	100	600	270
7	430	80	560	130

Из таблицы видно, что максимальная прибыль равна 420 тыс. дублонов. Она достигается при объеме выпуска, равном 4 парходам, и цене в 140 тысяч дублонов за один парход.

Видно, что использование завода позволяет увеличить прибыль компании на 110 тысяч дублонов. Это и есть максимальная цена, которую согласиться заплатить фирма за аренду второго завода.

### Задание 3.

Продукцию максимизирующего прибыль монополиста могут приобретать две группы потребителей, функции спроса которых имеют вид:  $q_1 = 10 - p$  и  $q_2 = 16 - p$ , где  $q$  – количество товара (в тоннах), а  $p$  – цена товара **в рублях**. Монополист обязан назначать одинаковую цену на товар для всех потребителей. Общие издержки монополиста, измеренные **в долларах**, заданы уравнением  $TC = 0,5 * q^2$ .

**(а)** Обозначим  $x$  – валютный курс доллара (рублей за доллар). Для каждого значения валютного курса доллара определите оптимальный выпуск монополиста.

**(б)** Как сказывается на прибыли монополиста ослабление рубля? Положительно или отрицательно? Дайте экономическую интерпретацию полученного результата.

#### Решение:

(а) Цель монополиста – максимизация прибыли. Так как по условию задачи дискриминация отсутствует (цена для обеих групп потребителей одинаковая), то монополист работает с общим спросом на товар:

$$Q_d = \begin{cases} 26 - 2p, p \in [0; 10] \\ 16 - p, p \in (10; 16] \end{cases}$$

Далее удобно разбить задачу на два случая.

Сначала рассмотрим случай, когда  $0 \leq p \leq 10$ .

Тогда спрос задаётся уравнением  $Q_d = 26 - 2p$ , откуда  $Q \in [6; 26]$

Найдём выручку монополиста.

$$P = 13 - \frac{Q}{2} \Rightarrow TR_1 = 13Q - \frac{Q^2}{2}$$

Так как спрос на товар зависит от цены в рублях, то выручка тоже выражена в рублях. Однако издержки монополиста выражены в долларах. При нахождении прибыли важно перевести всё в одинаковые единицы измерения.

Издержки монополиста в рублях равны  $TC = x * 0,5Q^2$ .

Тогда прибыль монополиста будет выглядеть так:

$$PR_1 = TR_1 - TC \Rightarrow PR_1 = 13Q - \frac{Q^2}{2} - 0,5xQ^2 = 13Q - (1 + x)\frac{Q^2}{2} \rightarrow \max$$

$$PR'_1 = 13 - (1 + x)Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{13}{1 + x}$$

Это максимум прибыли, так как её график – парабола ветвями вниз.

$$Q \in [6; 26] \Rightarrow 6 \leq \frac{13}{1 + x} \leq 26 \Rightarrow x \leq \frac{7}{6}$$

Таким образом, прибыль монополиста в этого случаи составит:

$$PR_1 = \frac{169}{2(1 + x)}$$

Заметим, что для всех  $x > 0$  прибыль положительна, а значит монополист будет производить ненулевое количество товара.

Теперь рассмотрим случай, когда  $10 < p \leq 16$ .

Сделаем те же расчеты для спроса  $Q_d = 16 - p$ , где  $Q \in [0; 6)$

$$P = 16 - Q \Rightarrow TR_2 = 16Q - Q^2$$

$$PR_2 = 16Q - Q^2 - 0,5xQ^2 = 16Q - (1 + 0,5x)Q^2 \rightarrow \max$$

$$PR'_2 = 16 - (2 + x)Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{16}{2 + x}$$

Это максимум прибыли, так как её график – парабола ветвями вниз.

$$Q \in [0; 6) \Rightarrow 0 \leq \frac{16}{2 + x} < 6 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

Таким образом, прибыль монополиста в этого случаи составит:

$$PR_2 = \frac{128}{2 + x}$$

Заметим, что для всех  $x > 0$  прибыль также положительна, а значит монополист будет производить ненулевое количество товара.

Теперь сравним прибыль монополиста в каждом случае для каждого  $x$ .

$$PR_1 > PR_2$$

$$\frac{169}{2(1+x)} > \frac{128}{2+x} \Rightarrow x < \frac{82}{87}$$

Значит, при курсе доллара от 0 до  $\frac{82}{87}$  монополист будет производить  $Q = \frac{13}{1+x}$ , так как в этом случае его прибыль больше. При более высоких значениях курса доллара монополист будет производить  $Q = \frac{16}{2+x}$ .

$$\text{Ответ: } Q = \begin{cases} \frac{13}{1+x}, & \text{при } 0 < x \leq \frac{82}{87} \\ \frac{16}{2+x}, & \text{при } x > \frac{82}{87} \end{cases}.$$

(б) Ослабление рубля – это увеличение курса доллара, то есть рост  $x$ . Так как прибыль монополиста отрицательно зависит от  $x$ , то ослабление рубля приведёт к уменьшению его прибыли. Это вполне логично, потому что увеличение курса доллара увеличивает издержки монополиста в рублях. Он продаёт товар на российском рынке, следовательно, при неизменной выручке и растущих издержках его прибыль уменьшается.

#### Задание 4. «Маркапы» (автор — Дмитрий Мухин)

Фирма «FC» является монополистом на рынке мыла. Для производства товара фирма использует только один фактор производства – труд, который она нанимает на совершенно конкурентном рынке.

1. Профессор А решил посчитать для фирмы её текущий «маркап», то есть отношение цены к предельным издержкам. Однако у него нет данных о технологии фирмы. Единственное, что он может оценить с помощью имеющейся информации, – это эластичность спроса по цене для каждой фирмы (в точке текущего равновесия). Достаточно ли этой информации? Если да, выведите формулу, которая поможет профессору А. Если нет, какая минимальная дополнительная информация необходима профессору А?

2. Профессор Б тоже поставил себе задачу найти «маркап» фирмы. Однако у него нет данных о спросе на продукцию фирмы. Зато его информации о технологии, затратах и расходах фирмы достаточно, чтобы найти в равновесии долю расходов на труд в общей выручке фирмы, а также эластичность выпуска фирмы по затратам труда. Достаточно ли этой информации? Если да, выведите формулу, которая поможет профессору Б. Если нет, какая минимальная дополнительная информация необходима профессору Б?

3. Как Вам кажется, почему величина «маркапа» может представлять интерес для экономиста? Эмпирические исследования показывают, что «маркапы» обычно выше для фирм с более высокой производительностью труда. Как Вы думаете, почему? Дайте графическую иллюстрацию.

Решение:

1. Этой информации достаточно. Из условия максимизации прибыли имеем:

$$MR = MC$$

$$p + Q \frac{dp}{dQ} = MC$$

$$\frac{p}{MC} + \frac{dp}{dQ} \frac{Q}{p} \frac{p}{MC} = 1$$

$$\frac{p}{MC} = \frac{1}{1 + 1/e}$$

где  $e < 0$  эластичность спроса по цене в точке равновесия.

2. Этой информации достаточно:

$$TC(Q) = wL(Q)$$

Так как рынок труда конкурентен, предельные издержки равны  $MC = w \frac{dL}{dQ} = \frac{w}{dQ/dL}$ .

Отсюда

$$\frac{p}{MC} = p \frac{dQ/dL}{w} = \frac{\frac{dQ}{dL} \frac{L}{Q}}{\frac{wL}{pQ}}$$

Числитель и знаменатель – эластичность выпуска по затратам труда и доля расходов на труд в выручке. Оба показателя известны профессору Б.

3. Маркап служит естественной мерой конкуренции в отрасли: при совершенной конкуренции  $p = MC$  и маркап равен 1. В случае монополии эта величина больше единицы. Чем выше маркап, тем больше монопольная власть фирмы. Рост производительности фирмы означает снижение её предельных издержек. Фирма при этом снижает цену и увеличивает выпуск. Следовательно, результат из пункта 1 указывает на то, что положительную связь между маркапом и производительностью можно объяснить уменьшением (по модулю) эластичности спроса при увеличении объема продаж. Обычная картинка с линейным спросом и горизонтальной функцией предельных издержек хорошо иллюстрирует это.