Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Экономический факультет
МГУ имени М.В.Ломоносова

При поддержке Правительства Москвы

Открытый чемпионат школ по экономике
Задания индивидуального тура

Задача №1

Условие задачи

Студент Василий любит играть в игру «Покемон Stop». У Василия есть девять пойманных им покемонов, из которых можно тренировать покемонов-хоккеистов и покемонов-футболистов. Так, если Z покемонов тренируются как хоккеисты, то у Василия может быть Z^2 покемонов–хоккеистов (X), а если Z покемонов тренируются как футболисты, у Василия будет Z^2 покемонов–футболистов (F). На игровой бирже имеется возможность менять одного хоккеиста на четырех футболистов (а футболиста – на ¼ хоккеиста). Для успешной игры количество хоккеистов у Василия должно быть ровно в два раза больше, чем количество футболистов.

Вопросы

Какое количество хоккеистов и футболистов будет в распоряжении Василия, если он максимально использует свои возможности по тренировке и обмену покемонов?

Решение

Запишем производственные функции Василия:

$X = Z^2$, $F=Z^2$

Обозначим покемонов, тренируемых как хоккеисты, за Z_X, а тренируемых как футболисты – за Z_F.

Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} Z_X + Z_F = 9 \\ Z_X = \sqrt{X} \\ Z_F = \sqrt{F} \end{cases}$$

Отсюда получим уравнение КПВ:

$\sqrt{X} + \sqrt{F} = 9$

Данная КПВ является выпуклой к началу координат (альтернативные издержки благ убывают по выпуску).

Рассмотрим, какое количество хоккеистов следует натренировать для того, чтобы обменять их на футболистов:

При любом значении F:

$$X_{\text{произв}} = (9 - \sqrt{F})^2$$

Мы знаем, что часть X может быть получена в результате обмена на F. Тогда:

$$X = X_{\text{произв}} + X_{\text{купл}}$$

$$F = F_{\text{произв}} - F_{\text{прод}}$$

С учетом курса обмена

$$X_{\text{купл}} = \frac{F_{\text{прод}}}{4}$$

Тогда

$X = \left(9 - \sqrt{F_{\text{произв}}}\right)^2 + \frac{F_{\text{произв}} - F}{4}$

Поскольку хоккеистов у игрока должно быть в два раза больше, чем футболистов, то

$$2F = \left(9 - \sqrt{F_{\text{произв}}}\right)^2 + \frac{F_{\text{произв}} - F}{4}$$

Выразим F и определим, сколько следует произвести футболистов с целью иметь в результате обмена их наибольшее количество:

$$\frac{9F}{4} = 81 - 18\sqrt{F_{\text{произв}}} + \frac{5F_{\text{произв}}}{4} \to max$$

Данная функция является квадратичной (относительно корня из $F_{\text{произв}}$, ее ветви направлены вверх. Следовательно, оптимальным решением будет либо натренировать всех покемонов как хоккеистов, либо – как футболистов, а затем менять их на игровой бирже.

В первом случае мы имеем КПВ X = 81 – ¼F, во втором – X = 9/4 – 1/4F.

Очевидно, что первая КПВ описывает большие производственные возможности. Тогда мы будем делать хоккеистов и обменивать их на бирже.

Следовательно:

$$\begin{cases} X = 81 - \frac{F}{4} \\ X^* = 2F^* \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \frac{9F^*}{4} = 81 \end{cases}$$

Ответ. F*=36, X*=72

Задача №2

Условие задачи

В стране Альфа проживают N жителей. Страна Альфа находится на берегу Океана. Время от времени случаются наводнения, из-за чего домам, в которых живут жители, наносится ущерб.

У каждого жителя – свой дом, стоимость всего имущества оценивается в 100 д.е. Если случится наводнение, то ущерб составит 64 д.е. Известно, что полезность каждого индивида вычисляется по следующей формуле: $v=\sqrt{c}$, где c – стоимость имущества индивида.

В стране Альфа есть страховая компания, которая предлагает людям купить страховой полис за цену t, по которому, в случае наводнения, страховая компенсирует весь ущерб. Компания знает, что в стране Альфа доля домов β располагается прямо на берегу океана, где вероятность каждого дома пострадать от наводнения (за год) составляет 1/2, а остальные дома находятся далеко от океана, и вероятность пострадать от наводнения этих домов составляет 1/4.

После того, как фирма устанавливает цену страховки, каждый житель принимает решение – приобретать ли её. Он приобретает страховку, если его ожидаемая полезность в случае её покупки оказывается не меньше, чем в случае отказа от покупки.

Примечания:

- Прибыль страховой компании рассчитывается как разность между страховыми взносами и страховыми выплатами.
- Страховая компания ориентируется на математическое ожидание. Математическим ожиданием называют число $M(x)$, равное сумме произведений всех значений случайной величины на вероятности этих значений, т.е.: $M(x)$=$\sum x_i p_i$, где x_i – значения случайной величины, p_i - значения вероятностей выпадения x_i ($\sum p_i$=1).

Вопросы

В зависимости от параметра β какую ставку t установит страховая компания, если она стремится максимизировать свою ожидаемую прибыль?

Решение

Определим цены, при которых каждая группа потребителей согласится купить страховку. Цена определяется разницей между математическим ожиданием полезности без страховки и при приобретении страховки.
Полезность тех, кто живет у океана:

$$\frac{1}{2}\sqrt{100} + \frac{1}{2}\sqrt{100-64} = \sqrt{100-t}$$
$$8 = \sqrt{100-t}$$
$$t = 36$$

Те, кто живут у океана, готовы купить страховку по цене не больше 36.

Полезность тех, кто живет далеко от океана:

$$\frac{3}{4}\sqrt{100} + \frac{1}{4}\sqrt{100-64} = \sqrt{100-t}$$
$$7.5 + 1.5 = \sqrt{100-t}$$
$$9 = \sqrt{100-t}$$
$$t = 19$$

Те, кто живут далеко от океана, готовы купить страховку по цене не больше 19.

Таким образом у страховой компании есть две опции для назначения цены: 19 или 36. По цене 36 страховку купят только те, кто живет около океана. А по цене 19 – обе группы. Теперь определим, какую цену назначит страховая компания в зависимости от величины параметра β.

Запишем прибыль страховой компании в зависимости от того, какую цену установили. Будем считать, что в стране живет N жителей.
Прибыль при цене = 19:

$$Pr_0 = 19 \cdot N - N\left(\frac{1}{2}\cdot\beta\cdot 64 + \frac{1}{4}\cdot(1-\beta)\cdot 64\right) = N(19 - 32\beta + 16 - 16\beta)$$
$$= N(35 - 48\beta)$$

Прибыль при цене = 36:

$$Pr_1 = 36 \cdot \beta \cdot N - N\left(\frac{1}{2} \cdot \beta \cdot 64\right) = 36\beta N - 32\beta N = 4\beta N$$

Определим при каких значениях β страховая будет назначать цену 36.

$$Pr_1 > Pr_0$$
$$4\beta N > N(35 - 48\beta)$$
$$52\beta > 35$$
$$\beta > \frac{35}{52}$$

Таким образом, для максимизации прибыли фирма будет назначать следующую цену за страховку:

$$t = \begin{cases} 19, \beta < \dfrac{35}{52} \\ 19 \text{ или } 36, \beta = \dfrac{35}{52} \\ 36, \beta > \dfrac{35}{52} \end{cases}$$