**ОЧ-2015. 11 класс**

**Задача 1.**

Население некоторого острова составляет ровно человек. Самый бедный получает всего дохода страны. Доход следующего жителя выше дохода предыдущего ровно на процентных пункта. Найдите коэффициент Джини в данной стране.

Правитель данного острова, который, безусловно, является самым богатым жителем, убежден, что высокое неравенство вредит экономике острова в долгосрочном периоде. Однако в текущий момент времени, как вы уже, наверное, посчитали, ему принадлежит лишь малая часть доходов.

Правитель раздумывает законным способом отнять часть доходов у своего населения. Если это произойдет, и правитель попытается нарушить сложившееся распределение доходов, возмущенное несправедливостью население немедленно объединится в одну партию. После присвоения правителем части доходов населения объединенная партия разделит оставшиеся доходы поровну между членом партии.

Функцию полезности правителя можно охарактеризовать следующим уравнением:

где – коэффициент Джини на острове, выраженный в долях; – доля доходов правителя в общем доходе острова, выраженная в процентах (5%, а не 0.05, например).

Определите долю доходов правителя, которая максимизирует его уровень полезности. Захочет ли правитель ограбить население и присвоить часть его дохода? Если да, то какую долю дохода он присвоит?

Примечание:

**Решение задачи 1.**

1. Определим, сколько человек живет на острове. Пусть – доля (в %) дохода -ого островитянина в общей доле доходов острова.

Используя формулу -ого члена арифметической прогрессии (), а также очевидный факт, что сумма всех долей жителей должна составлять 100% получаем систему уравнений:

Решая, которую получаем, что

2. Вычисление индекса Джини.

Каждый индивид образует группу, которая составляет в общей численности населения.

Доли доходов индивидов соответственно равны :

Накопленные доли доходов тогда равны:

Вычислим площадь под кривой Лоренца (), которая состоит из одного треугольника и 99 трапеций:

Выражение в квадратных скобках можно преобразовать следующим образом: каждая из долей входит в него 1 раз (когда появляется впервые) плюс число раз, равное удвоенному количеству скобок, в которые она входит после первого своего появления.

Поэтому:

Итак,

Тогда коэффициент Джини равен .

3. Стоит ли правителю что-либо менять.

Напомним, что – доля доходов правителя в общем доходе острова. После объединения 99 человек в одну партию и равномерного распределения доходов между ее членами правитель останется наиболее богатым на острове. Поэтому индекс Джини теперь будет равен:

– сумма площади треугольника с катетами 99 и и площади трапеции с основаниями и 100.

Тогда функция полезности правителя будет равна:

Максимум этой функции достигается при И полезность будет равна

Полезность до действий правителя была равна.

Сравнивая полезности, получаем, что правителю выгодно нарушить существующее распределение доходов (точное значение функции полезности вычислять необязательно, можно просто сказать, что выражение ).

**Задача 2.**

Иван Федоров – владелец книжного интернет-магазина в стране Читалия. Он давно думал о расширении ассортимента, и, узнав о том, что в 2015 году исполняется 120 лет со дня рождения Сергея Есенина, Иван решил начать продажу аудиокниг с произведениями этого поэта.

Иван выяснил, что аудиокниги с произведениями С. Есенина будут интересны двум группам потребителей со следующими функциями спроса: и .

Издержки на разработку нового раздела сайта и приобретение оригинала аудиозаписи составили 200 читаликов (читалики – денежные единицы Читалии). 2 читалика с каждой проданной аудиокниги Иван обязан перечислять автору оригинала аудиозаписей.

Продажа будет устроена таким образом, что покупатели смогут скачивать аудиокнигу прямо с сайта магазина. Для этого Ивану необходимо оплатить как минимум один сервер – 85 читаликов. Максимальная пропускная способность одного такого сервера составляет 40 скачиваний. Если спрос на аудиокниги неожиданно окажется высоким, Иван может оплатить дополнительные серверы, за каждый из которых также придется заплатить 85 читаликов.

Естественно, количество продаваемых аудиокниг может быть только целым числом.

1. Допустим, что Иван решил продавать аудиокниги обеим группам по единой цене. Найдите количество продаваемых копий, их цену и прибыль Ивана.
2. Допустим, что есть возможность продавать аудиокниги разным сегментам по разным ценам. Какими будут объемы продаж, цены и прибыль в этом случае?
3. Изменится ли число продаваемых аудиокниг в ситуациях 1) и 2), если теперь Иван сможет оплачивать каждый сервер всего лишь за 1 читалик. Если да, то как? Если нет, то почему?

**Решение задачи 2.**

Функция рыночного спроса:

Издержки, которые несет Иван:

– количество используемых серверов

Ситуация 1. Единая цена для двух групп

Прибыль фирмы:

Количество, максимизирующее прибыль фирмы: Тогда цена, которую Иван должен назначить, составляет Заметим, что полученная цена удовлетворяет первому участку функции рыночного предложения.

Также полезно заметить, что мы нашли именно максимум прибыли, потому что функция прибыли – парабола, ветвями вниз.

Однако с одним сервером Иван не сможет продавать весь этот выпуск. Таким образом, перед ним встает вопрос: продавать только 40 аудиокниг, оплачивая только 1 сервер, или дополнительно приобрести еще один сервер и продавать оптимальное количество.

Сравним прибыли Ивана в этих двух случаях.

Если используется 1 сервер:

Если используются 2 сервера:

Поэтому Ивану выгоднее использовать только 1 сервер. Его прибыль при этом составит .

Проверим второй участок предложения:

Количество, максимизирующее прибыль фирмы: Тогда цена, которую Иван должен назначить, составляет Заметим, что полученная цена удовлетворяет второму участку функции рыночного предложения.

При Ивану потребуется всего 1 сервер. Его прибыль составит:

. Это меньше, чем максимальная прибыль в предыдущем пункте.

Ситуация 2. Разные цены для двух групп.

Функция прибыли – сумма двух парабол ветвями вниз. Максимум прибыли достигается, если каждая из парабол достигает максимума. Это происходит при условиях:

Т.е. при и =18. Суммарное продаваемое количество , что требует использования двух серверов. Тогда прибыль фирмы составит:

Как и в первом случае, необходимо сравнить полученную прибыль с прибылью, которую можно получить, используя только один сервер. Тогда необходимо решить следующую задачу:

*при условии*

Выражая одно количество через другое и подставляя в функцию прибыли, получаем:

Оптимальное количество в этом случае: . Однако количество продаваемых аудиокниг, естественно, может быть только целым числом. Поэтому необходимо сравнить два ближайших целых значения:

1)

Тогда .

Прибыль фирмы составит:

2)

Тогда .

Прибыль фирмы составит: .

Таким образом, прибыль с использованием одного сервера превосходит прибыль при использовании двух серверов. Поэтому прибыль Ивана составит Будет продано по цене и по цене

3) Если аренда сервера теперь составляет 1 читалик.

Ситуация 1:

Теперь выгоднее продавать 42 аудиокниги, используя 2 сервера.

Ситуация 2:

Теперь выгоднее использовать два сервера. Продавать и =18.

**Задача 3.**

# В стране Файтклабии производится один единственный товар – мыло. Только две фирмы имеют лицензии на мыловарение в стране: фирма использует производственную функцию , в то время как производственная функция фирмы имеет вид , где – количество рабочих, работающих на фирме , – количество мыла, производимого фирмой за год (). Общее количество рабочих в экономике составляет человек. Вас просят помочь правительству страны в принятии мер по повышению эффективности экономики страны.

1. Сколько человек должны работать на каждом предприятии, чтобы выпуск мыла в стране был максимальным, если ?
2. Сколько человек должны работать на каждом предприятии, чтобы выпуск мыла в стране был максимальным, если ?
3. Предположим, что правительство страны не знает, которая из двух фирм и . Поэтому вместо того, чтобы самому распределить трудовые ресурсы между предприятиями, государство решает положиться на «невидимую руку рынка». Предполагая, что и каждая фирма воспринимает цену мыла и заработную плату заданными, найдите равновесное распределение работников между двумя фирмами, а также отношение цены мыла к заработной плате. Сравните выпуск мыла при распределении ресурсов правительством и выпуск мыла в рыночном равновесии.
4. При каких обстоятельствах распределение ресурсов между фирмами может оказаться неэффективным в реальной экономике? Назовите как можно больше причин. Под эффективностью в этом случае понимается эффективное распределение ресурсов, т.е. распределение, максимизирующее суммарный объем производства мыла в экономике.

# Предположим, что правительство Файтклабии по-прежнему не умеет различать фирмы и *,* более того, знает лишь, что их производственные функции имеют вид , где (одинаковая для обеих фирм), а производительности и правительству неизвестны. В своих бюджетных декларациях фирмы честно указывают лишь количество рабочих и количество произведенного мыла. Может ли правительство определить, является ли распределение ресурсов в экономике эффективным, используя лишь эту имеющуюся у него информацию?

*i*

**Решение задачи 3.**

1. В этом случае фирмы работают с возрастающей отдачей от масштаба. Соответственно выгодно сконцентрировать все трудовые ресурсы на одном предприятии. Так как производительность фирмы выше, оптимальное распределение ресурсов Более формально, предельный продукт труда на втором предприятии выше для всех значений, чем предельный продукт труда первой фиры.
2. В этом случае обе фирмы используют технологии с убывающей отдачей от масштаба, а потому максимальный выпуск мыла достигается, когда обе фирмы нанимают положительное количество работников. Формально задача имеет вид:

Условие оптимальности (равенство нулю производной оптимизируемой функции):

Отсюда находим .

1. Обозначим цену мыла через , а заработную плату в экономике – . Тогда задача фирмы имеет вид:

Условие оптимальности можно интерпретировать как спрос фирмы на труд:

Аналогично для второй фирмы получаем .

Далее используем условие равенства спроса и предложения на рынке труда:

Таким образом, в рыночном равновесии . Так как распределение ресурсов в равновесии такое же, как в пункте 2, производство мыла максимизируется без вмешательства правительства. В этом и состоит эффект «невидимой руки рынка» Адама Смита.

1. В реальной экономике существует множество причин, по которым распределение ресурсов может быть субоптимальным. Некоторые примеры:
   1. рыночная власть фирм (как на рынке товара, так и на рынке факторов производства): крупным фирмам может быть выгодно занижать объем производства по сравнению с оптимальным уровнем, чтобы сбить цены на факторы производства и повысить цену на свою продукцию.
   2. несовершенные рынки капитала мешают растущим фирмам занимать достаточное количество ресурсов для развития. Это, в свою очередь, может быть связано с асимметричной информацией (кредиторы имеют лишь приближенное представление о состоянии дел фирмы-заёмщика) и ограниченной ответственностью фирм (если долги слишком велики, фирма всегда может объявить о банкротстве).
   3. несовершенные рынки труда: поиск подходящих вакансий занимает у работников много времени, а поиск качественных работников требует дополнительных расходов от фирм. Таким образом, количество нанятых работников может оказаться ниже оптимального значения.
   4. изменение физического запаса капитала и количества работников на фирме может потребовать дополнительных издержек от фирмы. Из-за этого объем используемых факторов производства может меняться с лагом после изменения производительности фирмы, что приводит к субоптимальному распределению ресурсов.
   5. различные налоги способны искажать решения фирм о количестве нанимаемых работников, инвестициях в капитал и объемах производства.
   6. коррупция и связи фирм с государственными структурами могут создавать неравные условия, что также искажает распределение ресурсов между фирмами.
   7. наличие внешних эффектов
   8. фирмы могут не максимизировать прибыль
2. Обобщая задачу из пункта 2, получаем:

Условие оптимального распределения ресурсов:

которое можно переписать как

Это условие вместе с ограничением определяет распределение ресурсов в экономике. Поскольку второе условие всегда выполнено, правительству, чтобы понять, эффективно ли распределение ресурсов в экономике, достаточно проверить, что средний продукт равен на двух фирмах.

**Задача 4.**

В 1950-е годы экономисты обнаружили положительную взаимосвязь между уровнем инфляции и отклонением фактического совокупного выпуска от потенциального. Эту зависимость стали впоследствии называть кривой Филлипса[[1]](#footnote-1):

где – фактический уровень инфляции; – ожидаемый уровень инфляции; –фактический совокупный выпуск; – потенциальный совокупный выпуск; – положительный параметр.

В экономике некоторой страны есть Центральный Банк. Часто для описания предпочтений Центрального Банка вводят функцию потерь , которую Центральный Банк *минимизирует*. Глава ЦБ не любит инфляцию, но любит, когда в стране экономический подъем (фактический ВВП превышает потенциальный):

где – целевой уровень инфляции, который Центральный Банк считает наиболее благоприятным для экономики (постоянный параметр в рамках этой задачи); – положительный параметр.

Будем предполагать, что гипотеза рациональных ожиданий верна, т.е. в равновесии ожидаемая инфляция равна фактической.

Взаимодействие между экономическими агентами и Центральным Банком происходит следующим образом:

1) Сначала экономические агенты формируют свои ожидания (), минимизируя следующую функцию потерь: .

2) После этого Центральный Банк узнает выбранный уровень ожиданий и выбирает уровень инфляции .

Предполагается, что Центральный Банк может непосредственно выбирать уровень инфляции и совокупного выпуска, которые ему необходимы. Также предполагается, что единственное ограничение, при котором Центральный Банк минимизирует свою функцию потерь, это кривая Филлипса.

Вопросы:

1. Изобразите кривую Филлипса в координатах (), предполагая, что . Отметьте точку (). Нарисуйте кривую безразличия Центрального Банка, (т.е. все комбинации (), при которых принимает фиксированное значение), проходящую через точку (). Чему равно значение функции потерь () в этом случае?

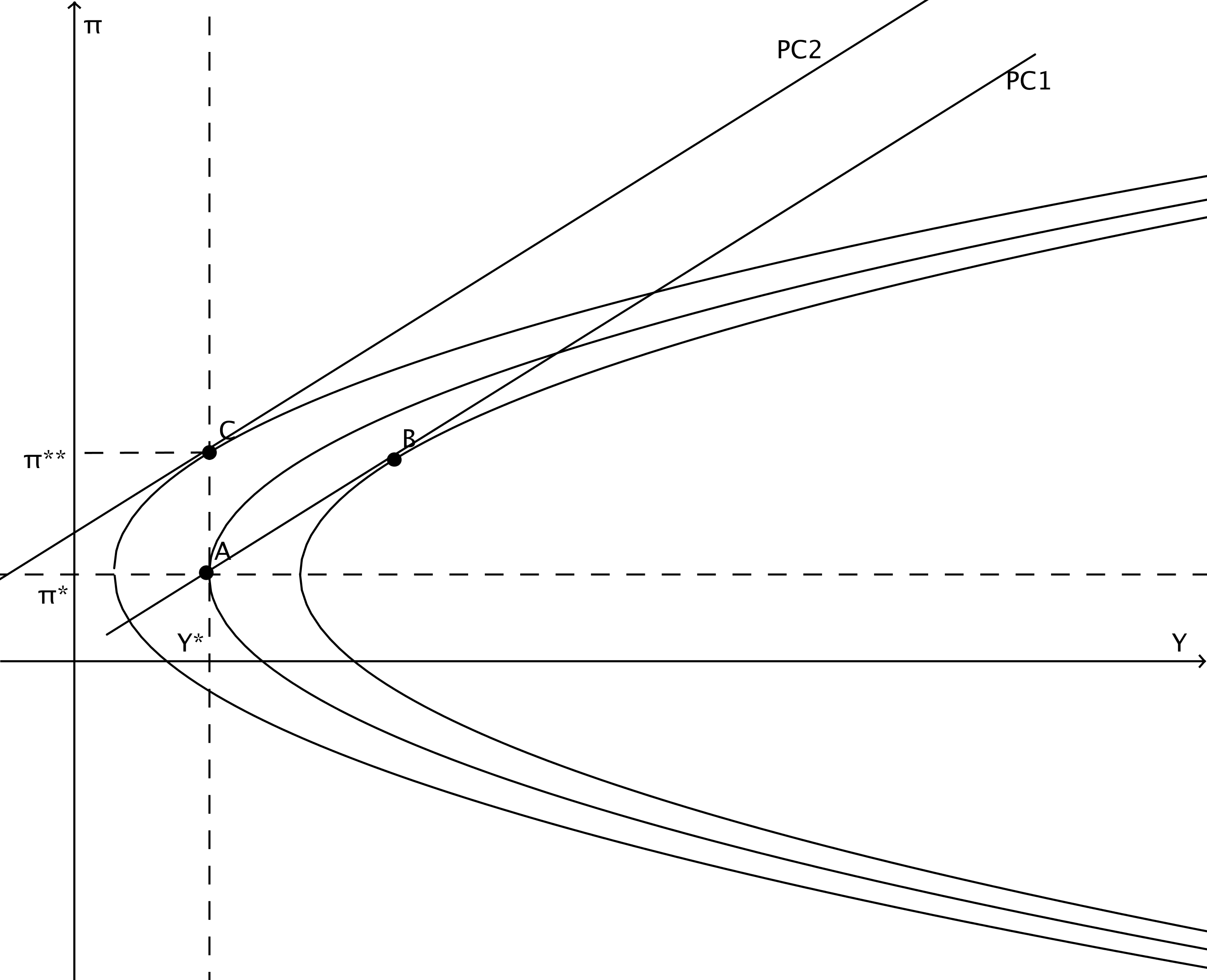
2. Предполагая, что ожидания не меняются (), определите, выгодно ли будет Центральному Банку такое состояние экономики, в котором значения совокупного выпуска и инфляции составят ()? Может ли он уменьшить свои потери при таких ожиданиях? Рассчитайте уровень инфляции и выпуска, которые выберет Центральный Банк. (*Подсказка: посмотрите на график, который вы построили в предыдущем пункте. Подумайте, в каком направлении уменьшается значение функции потерь, попробуйте построить различные кривые безразличия*).

3. Теперь вспомните, что по условию задачи экономические агенты формируют рациональные ожидания, т.е. в равновесии фактический уровень инфляции должен быть равен ожидаемому. Изобразите кривую Филлипса, для которой это условие выполнено. Какое равновесие установится в экономике? Возможна ли ситуация, в которой Центральному Банку лучше, а остальным экономическим агентам не хуже?

*Рассмотренный в этой задаче cюжет в экономической литературе получил название проблемы временной несогласованности монетарной политики.*

**Решение задачи 4.**

1.



2. Если , то ограничение для Центрального Банка – кривая Филлипса PC1. Т.к. , то при росте , значение функции потерь ЦБ снижается, поэтому чем правее расположена кривая безраличия, тем лучше для ЦБ. Поэтому при ограничении PC1 равновесие установится в точке B.

3. Равновесие должно установится в точке С: выпуск находится на уровне потенциального, а кривая Филлипса и кривая безразличия ЦБ касаются в этой точке.

В равновесии выпуск находится на уровне потенциального: это следует из кривой Филлипса , поэтому .

Кривая Филлипса и кривая безраличия ЦБ касаются, поэтому ЦБ невыгодно отклонятся и это равновесие.

Теперь найдем точки B и С:

Точка B:

при (мы воспользовались тем, что ).

Решая эту задачу (можно просто подставить ограничение в целевую функцию), получаем, что . Значение функции потерь составит: . Поэтому Центральный Банк улучшил свое положение, уменьшив функцию потерь.

Точка С:

Как мы показали выше, кривая безразличия и кривая Филлипса должны касаться в этой точке, а .

Наклон кривой Филлипса: Наклон кривой безразличия:

Приравнивая наклоны, получаем условие для точки C: .

1. Вероятно, если вы ранее сталкивались с кривой Филлипса, то вы рассматривали отрицательную взаимосвязь инфляции и безработицы. Однако несложно понять, например, в силу закона Оукэна, что это эквивалентно положительной взаимосвязи инфляции и отклонения выпуска от потенциального. [↑](#footnote-ref-1)