



ОТКРЫТЫЙ ЧЕМПИОНАТ  
ШКОЛ ПО ЭКОНОМИКЕ  
МГУ имени М.В.Ломоносова

## Задания индивидуального тура

### Задача 1

Вупсень и Пупсень пришли получать зарплату, но в бухгалтерии что-то перепутали, и Вупсень получил маленький конверт с двумя вишенками, а Пупсень – большой со сливой. К сожалению, бухгалтер наотрез отказался перепроверять правильность расчетов, а поэтому Вупсень и Пупсень будут восстанавливать справедливость собственными силами.

Вупсень полагает, что 100 монет, которые он обнаружил в маленьком конверте с двумя вишенками, на самом деле причитаются Пупсеню, а его вознаграждение должно быть гораздо больше. Пупсень тоже понимает, что произошла какая-то ошибка, но расставаться со своими 180 монетами не торопится. Он предлагает Вупсеню поступить следующим образом: он отдаст тому определенную **ненулевую** сумму  $X$  из большого конверта, и если Вупсень устроит такой дележ, то вопрос будет закрыт, а если не устроит, то Пупсень заплатит 20 монет в кассу в качестве штрафа за собственную меркантильность. Обе гусеницы руководствуются исключительно максимизацией количества монет в своих конвертах.

- а. Какую сумму передаст Пупсень Вупсеню?

Бухгалтер, понимая свою вину и видя невозможность гусениц договориться, предлагает им поступить следующим образом: Пупсень отдаст ему некоторую сумму  $Y$ , бухгалтер утроит ее, добавив недостающее количество монет из кассы, и передаст все это Вупсеню. Тот, в свою очередь, примет решение, какой частью из этой суммы поделиться с Пупсенем.

- б. Какую сумму передаст Пупсень бухгалтеру?

с. Согласно некоторым исследованиям, в аналогичных по сценарию экспериментах люди склонны вести себя неоднозначным образом. Назовите по одному возможному объяснению тому, почему:

- В сценарии из пункта (а) Пупсень мог передать большую сумму, чем в решении.
- В сценарии из пункта (б) Пупсень мог передать большую сумму, чем в решении.

### Решение 1

а. Доход Вупсеня:  $100 + x$  либо 100, если он отказывается от дележа; доход Пупсеня:  $180 - x$  либо  $180 - 20$ , если Вупсень отказывается от дележа. Рациональный Вупсень никогда не откажется от дележа при  $x > 0$ , а значит

штрафа не последует. Доход Пупсеня составит  $180 - x$ , для его максимизации он передаст 1 монету.

б. Пусть Вупсень поделится с Пупсенем суммой  $y$ . Тогда доход Вупсеня:  $100 + 3y - z$ ; доход Пупсеня:  $180 - y + z$ . Поскольку суммы  $x$  и  $y$  никак не связаны между собой, каждая из гусениц выбирает свой параметр для максимизации своего дохода. Оптимум будет в нуле.

с. Возможные варианты ответов:

Боязнь справедливости: передача очень маленькой суммы могла стимулировать Вупсеня наказать того за скряжничество

Reciprocity: попытка спровоцировать у Вупсеня желание «отблагодарить» его за демонстрацию пронастроенных намерений и вернуть сумму, большую чем  $x$ .

*Предлагается ставить  $7 + 7 + (3 + 3)$  балла за каждый пункт.*

## Задача 2

Пять пиратов и одна мартышка потерпели кораблекрушение и оказались на необитаемом острове. Первый день своего пребывания на острове пираты провели плодотворно и собрали много кокосов. Вечером первого дня пираты сложили все кокосы в общую кучу и договорились утром второго дня разделить ее поровну между собой.

Первый пират проснулся ночью от неожиданного соображения: остальным пиратам нельзя доверять, потому что все они мошенники! Для восстановления справедливости он тихо прокрался к куче и по пути нечаянно разбудил мартышку. Оценив потребности мартышки, он решил отдать ей один кокос, чтобы та вела себя тихо. Остальные кокосы ему удалось разделить на пять равных частей. После этого он забрал одну часть, чтобы обезопасить себя от коварства остальных, и спрятал ее в укромном месте. Так же со своим кокосом поступила и мартышка.

Через некоторое время проснулся второй пират и сделал то же самое: прокрался к куче, разбудил мартышку, отдал ей один кокос и забрал пятую часть от оставшихся (кстати, ему также удалось поделить их на пять равных частей). Далее все остальные пираты по очереди просыпались и действовали в соответствии с таким же алгоритмом.

Проснувшись наутро, пираты единогласно решили отдать один из оставшихся кокосов мартышке (никто не мог признаться остальным в своем жульничестве, но каждый по отдельности хотел вознаградить мартышку за то, что та была тихой). После этого оставшуюся кучу кокосов они решили поделить поровну между всеми, и им удалось это сделать.

а. Учитывая, что количество кокосов может выражаться только натуральным числом (или нулем), определите, какое минимальное количество кокосов должны были собрать пираты в сумме в первый день?

б. Решите аналогичную задачу в ситуации, когда пиратов не 5, а 4.

## Решение 2

**Простой вариант:** наименьшее количество кокосов соответствует случаю, когда наутро их осталось 6 (из которых один мартышкин). Тогда задачу можно формализовать так:

$$4 \frac{4 \frac{4 \frac{x-1}{5} - 1}{5} - 1}{5} = 6$$

*За правильный вывод этого уравнения предлагается ставить 10 баллов. Еще 10 баллов за верно посчитанный  $x$  (15621)*

**Сложный вариант:** задачу можно формализовать следующим образом: пусть исходно собрано  $n$  кокосов, тогда, проснувшись ночью, первый пират отдаст 1 кокос мартышке, а оставшееся разделит на 5 равных частей, каждая из  $a$  кокосов. Второй пират обнаружит ночью кучу из  $4a$  кокосов, из которой 1 кокос отдаст мартышке, а остальные поделит на 5 равных частей, каждая из  $b$  кокосов. Алгоритм продолжается с каждым пиратом.

Тогда задачу можно переписать в виде системы из 6 уравнений в натуральных числах (по 1 дележу на каждого пирата + 1 дележ утром второго дня):

$$\begin{cases} n = 5a + 1 \\ 4a = 5b + 1 \\ 4b = 5c + 1 \\ 4c = 5d + 1 \\ 4d = 5e + 1 \\ 4e = 5f + 1 \end{cases}$$

Нетрудно свести эту систему уравнений к одному, которое будет являться ее следствием:

$$1024n = 15625f + 11529$$

Любое решение системы будет являться также решением полученного уравнения, в том числе и наименьшее натуральное  $n$ , являющееся решением системы. Попробуем найти наименьшее натуральное  $n$ , разрешающее данное уравнение: если оно подойдет в качестве решения всей системы с учетом целочисленности, оно и будет ответом.

*Предлагается ставить 9 баллов за получение уравнения выше или постановку математической задачи, приводящей к получению ответа на вопрос задания.*

Решение уравнения можно получить стандартными способами решения диофантовых уравнений, однако здесь мы продемонстрируем хитрость с отрицательными целыми числами (хоть количество кокосов таковым быть и не может): интуитивно ясно, что проще всего задачка бы решалась, если бы количество кокосов в общей куче после каждой итерации оставалось прежним и кратным 5. Тогда должно выполняться равенство  $n = 4a = 5a + 1$ , откуда  $a = -1$ , а  $n = -4$ . И действительно, если пираты изначально собрали  $-4$  кокоса, то, подходя к куче, первый пират будет отдавать мартышке 1 кокос и забирать пятую часть от оставшихся  $-5$  кокосов, оставляя следующему пирату вновь кучу из  $-4$  кокосов, и т.д.

Тогда для нахождения наименьшего натурального  $n$ , разрешающего уравнение, нужно прибавить 15625 и получить исходную кучу в 15621 кокос. Непосредственной подстановкой в систему можно убедиться, что  $15621 = 5^6 - 4$  кокос начального запаса ей удовлетворяет, а потому и будет ответом.

*Предлагается ставить 5 баллов за получение верного ответа на вопрос с обязательным обоснованием.*

Аналогичным образом, второй пункт задачи приводит к ответу  $4^5 - 3$ .

*Предлагается ставить 4 балла за вывод уравнения / постановку задачи и 2 балла за получение верного ответа на вопрос с обязательным обоснованием.*

### Задача 3

В компании «ДифИнДиф» в 2017-2018 годах работало 200 сотрудников. В начале 2017 года руководство компании предложило 100 сотрудникам добровольно пройти бесплатные курсы повышения квалификации (с сохранением зарплаты на время прохождения курсов). В конце 2018 года руководство компании задалось вопросом оценки эффективности предложенных курсов непосредственно для сотрудников компании. В таблице ниже приведены средние заработные платы всех сотрудников компании в начале 2017 и конце 2018 года, а также средние зарплаты 100 добровольно отобранных сотрудников, прошедших курсы повышения квалификации.

	<i>Средняя зарплата всех сотрудников компании</i>	<i>Средняя зарплата 100 сотрудников, прошедших курсы повышения квалификации</i>
<i>Начало 2017 года</i>	55 тыс. руб.	50 тыс. руб.
<i>Конец 2018 года</i>	65 тыс. руб.	58 тыс. руб.

- Рассчитайте средние заработные платы тех оставшихся 100 сотрудников компании, которые не проходили курсы повышения квалификации в начале 2017 и конце 2018 гг.
- Оцените эффективность курсов на основе имеющихся у вас данных.
- Приведите один содержательный аргумент, почему, несмотря на полученный вами в предыдущем пункте результат, курсы, тем не менее, можно считать эффективными.
- Объясните, как наилучшим образом можно было бы оценить эффективность курсов повышения квалификации.

### Решение 3

#### Пункт а)

Средняя заработная плата оставшихся 100 сотрудников компании, которые не проходили курсы повышения квалификации, в начале 2017 года  $= \frac{55 \cdot 200 - 50 \cdot 100}{100} = 60$ .

(3 балла)

Средняя заработная плата оставшихся 100 сотрудников компании, которые не проходили курсы повышения квалификации, в конце 2018 года  $= \frac{65 \cdot 200 - 58 \cdot 100}{100} = 72$ .

(3 балла)

#### Пункт б).

Можно оценивать несколькими разными способами:

- сравнить прирост средней зарплаты для всех сотрудников и для посетивших курсы. Тогда для всех сотрудников прирост составляет 10 тыс. руб., а для выбравших курсы – всего 8 тыс. руб. Разность средних =  $-2$ , что говорит о неэффективности курсов.

- сравнить прирост средней зарплаты для посетивших курсы и НЕ посетивших курсы (это более правильный вариант). Тогда для не выбравших курсы прирост составляет 12 тыс. руб., как было рассчитано в пункте а). Разность средних тогда является еще более сильной и  $= -4$ , что говорит о еще большей неэффективности курсов.

*4 балла за любой логичный вариант*

**Пункт с).**

Несмотря на отрицательную разность, мы на самом деле не можем делать выводы о неэффективности курсов. Дело в том, что, судя по средним, курсы добровольно выбрали более низкооплачиваемые сотрудники. Они могут являться менее способными, образованными и т.п., поэтому прирост их зарплаты ниже, чем средний прирост зарплаты по всей компании, а особенно по сравнению с приростом зарплаты более высокооплачиваемых сотрудников, не выбравших курсы. И в силу добровольности выбора мы не знаем, больше или меньше 8 тыс. руб. был бы прирост зарплаты среди этих 100 сотрудников, выбравших курсы, таким образом, не можем оценить эффективность курсов (*6 баллов*).

**Пункт d).**

Для того, чтобы понять, стоит ли проводить подобные курсы в принципе, нужно случайным образом отобрать 100 сотрудников, которых стоит отправить на курсы, чтобы нивелировать систематические индивидуальные различия между сотрудниками. И тогда по итогам курсов можно проводить сравнение средних (*4 балла*).

#### Задача 4

В губернском городке  $N$  разгорелся нешуточный скандал: обнаружилось, что некоторые недобросовестные помещики ведут скрытую торговлю мертвыми душами и уже заработали на этом целое состояние. Для борьбы с незаконным оборотом мертвых душ губернатор распорядился учредить специальный надзорный орган – Комитетный комитет. Комитет получает от губернатора вознаграждение, определенное в размере  $R=358Q-Q^2/3$ , где  $R$  – величина вознаграждения в рублях, а  $Q$  – количество обнаруженных комитетом мертвых душ в штуках. При этом непрерывные разъезды и поиск тщательно скрываемой информации обременяют комитет расходами в размере  $C=102Q+Q^2/9$ , где  $C$  – величина расходов в рублях, а  $Q$  – количество обнаруженных комитетом мертвых душ в штуках. Иных источников дохода, как и расходных статей, Комитетный комитет не имеет.

Губернатор будет продолжать финансировать деятельность комитета до тех пор, пока она представляется ему эффективной: иначе говоря, пока каждый дополнительно потраченный им рубль будет приносить прирост в количестве обнаруженных мертвых душ. Комитет, в свою очередь, стремится в условиях полученного им финансирования выявить их как можно больше.

**a.** Какое количество мертвых душ будет обнаружено Комитетным комитетом?

Господин Чичиков, возглавивший Комитетный комитет, совсем не собирается ответственно исполнять свои обязанности: для него гораздо важнее, чтобы комитет смог сэкономить как можно больше денег, не вызвав при этом подозрения в неэффективности со стороны губернатора.

**b.** Какое количество мертвых душ будет обнаружено Комитетным комитетом в этих условиях и какое количество денег не будет им потрачено?

**c.** Одним из способов улучшения контроля за деятельностью государственных учреждений является введение измеряемых критериев оценки и определенных нормативов по ним (количество выздоровевших пациентов, средний экзаменационный балл выпускников учебного учреждения и тому подобные). Приведите в пример не более двух последствий такого подхода, которые негативно сказываются на выполнении государственными учреждениями своих основных функций.

#### Решение 4

##### Пункт а)

Имеем дело с двумя условиями:

$R \geq C$  – условие сбалансированного бюджета

$R(Q^*) - R(Q^* - 1) \geq 0$  – условие эффективной работы («лояльности спонсора»)

Исходя из того, что комитет стремится выявить как можно более сомнительных сделок, оптимальная величина его производства определяется из соотношения  $R = C$ :

$$358Q - \frac{Q^2}{3} = 102Q + \frac{Q^2}{9}$$

$$256 = \frac{Q}{9} + \frac{Q}{3} = \frac{4Q}{9}$$

$$Q^* = 64 * 9 = 576$$

(4 балла за найденное значение)

Проверим, будет ли выполняться условие лояльности спонсора. Удобнее сразу определять это в общем виде, поскольку в случае несоответствия ему оптимальной величины из предыдущего действия определяющим будет именно крайнее решение этого неравенства:

$$R(Q^*) - R(Q^* - 1) = 358Q - \frac{Q^2}{3} - 358(Q - 1) + \frac{(Q - 1)^2}{3} \geq 0$$

$$358 - \frac{Q^2}{3} + \frac{Q^2 - 2Q + 1}{3} \geq 0$$

$$\frac{2Q - 1}{3} \leq 358$$

$$Q \leq \frac{1075}{2} = 537,5$$

(4 балла за найденное значение)

Значит, оптимальное значение  $Q = 537$  (на 538 губернатор уже не даст денег)

(2 балла)

**Ответ: 537**

**Пункт б)**

Учитывая ограничение из предыдущего пункта ( $Q \leq 537$ ), максимизируем разность  $R - C$ :

$$358Q - \frac{Q^2}{3} - 102Q - \frac{Q^2}{9} \rightarrow \max$$

$$Q \left( 256 - \frac{4Q}{9} \right) \rightarrow \max$$

Корни 0 и 576, максимум в  $576/2 = 288$

**Ответ: 288**

*Предлагается ставить 6 баллов за верный ответ и 0 баллов иначе.*

**Пункт с)**

*По 2 балла за каждый обоснованный вариант ответа*



## Задача 5

Когда попугаю Кеше стукнуло двадцать, он устроился на работу в неправительственную организацию. Начальная зарплата Кеша составляет 10 000 долларов в год, и за каждый год стажа будет увеличиваться еще на 500 долларов. После двадцати лет непрерывной работы зарплата расти перестанет и будет оставаться на одном и том же уровне вплоть до Кешина увольнения.

Кеша планирует проработать до шестидесяти лет, после чего выйти на заслуженный отдых. Все оставшееся время (а ожидаемая продолжительность жизни попугаев его вида – восемьдесят лет) он будет получать государственную пенсию на уровне 10 000 долларов в год.

**a.** Предположим, Кеша стремится сгладить свое потребление во времени, иначе говоря, каждый год потреблять благ на одну и ту же сумму. Если Кеша может брать деньги в долг без процентов, но обязательно должен их вернуть до конца своей жизни, сколько денег в год он будет тратить на потребление? Изобразите графически зависимость доходов и потребления Кеша от его возраста.

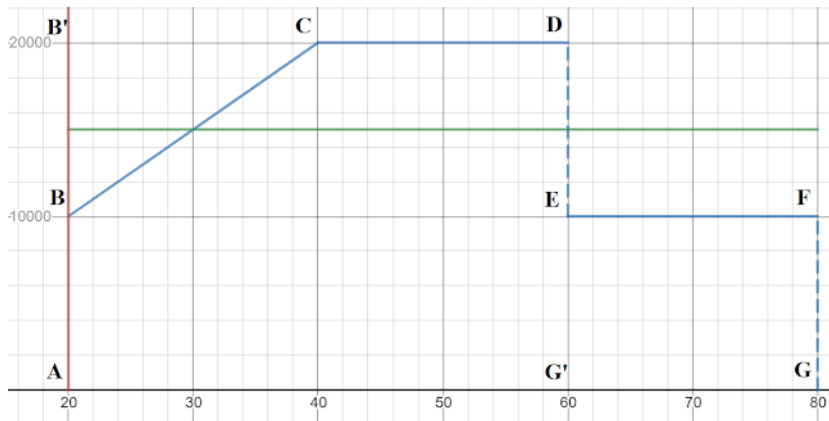
Не успел Кеша проработать и одного дня, как Правительство приняло решение изменить систему выплаты пенсий. Теперь Кеша каждый год будет выплачивать отчисления в размере  $x$  долларов на свой личный счет в пенсионном фонде. Все сбережения, которые Кеша успеет накопить за сорок лет работы, будут выплачиваться ему равномерно после того, как он выйдет на пенсию. Кеша сам выбирает размер  $x$  - главное, чтобы он не превышал размер зарплаты и был постоянным на протяжении всех сорока лет.

**b.** Предположим, Кеша хочет по выходу на пенсию получать столько же, сколько он получал в последние двадцать лет работы (когда зарплата уже перестала расти). Какой уровень пенсионных отчислений должен выбрать Кеша? Как изменится уровень ежегодного потребления Кеша? Изобразите графически зависимость доходов и потребления Кеша от его возраста.

**c.** Исследования статистических данных показывают, что в действительности потребление индивидов во времени, как правило, не является постоянным. Приведите два возможных объяснения данному наблюдению.

## Решение 5

a) Для того, чтобы понять, какую сумму Кеша может тратить на потребление каждый год, необходимо рассчитать суммарный доход за всю его жизнь. Для этого нарисуем график ежегодных доходов Кеша (рис. 1). Суммарный доход можно рассчитать как площадь под графиком ежегодных доходов.



Сделать это можно разными способами. К примеру, мы можем сложить площади прямоугольников  $AB'DG'$  ( $20000 * (60 - 40) = 800000$ ) и  $EFGG'$  ( $10000 * (80 - 60) = 200000$ ), а затем вычесть из суммы площадь треугольника  $BB'C$  ( $0,5 * (40 - 20) * (20000 - 10000) = 100000$ ). Таким образом, суммарный доход Кеша равен  $800000 + 200000 - 100000 = 900000$  долларов. Теперь осталось поделить эту сумму на оставшиеся 60 лет жизни Кеша, и мы получим уровень ежегодных затрат на потребление. Они равны  $900000/60 = 15000$  долларов в год.

*Критерии:*

3 балла за правильно нарисованный график

2 балла за идею о том, что суммарный доход - это площадь

2 балла за правильный расчет суммарного дохода

1 балл за правильный расчет потребления

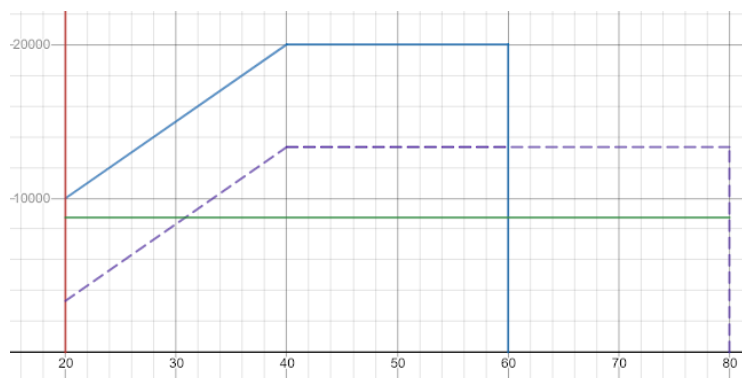
б) Если Кеша будет выплачивать  $x$  долларов в пенсионный фонд каждый год работы, на пенсии он будет получать  $40 \cdot x/20 = 2x$  долларов в год. При этом в последние годы работы он будет получать  $20000 - x$  долларов в год. Так как Кеша хочет сгладить доходы, ему нужно приравнять доход до выхода на пенсию к доходу после выхода на пенсию.

$$20000 - x = 2x$$

$$x = 6666,67$$

Таким образом, каждый год Кеше надо откладывать 6666,67 долларов.

Графически ежегодную выплату  $x$  рублей можно представить параллельным переносом графика рабочих доходов вниз на величину  $x$ . На рис. 2 сплошной линией представлены доходы до выплат, пунктирной - после выплат.



Для того, чтобы посчитать ежегодное потребление, нам снова необходимо рассчитать суммарные доходы. Это можно сделать, как в первом пункте, рассчитав площадь под графиком, но после сдвига это делать неудобно из-за нецелых чисел. Гораздо проще осознать, что мы можем посчитать площадь под графиком доходов в случае нулевых выплат, так как в данном пункте пенсия - это просто перераспределение дохода с ранних периодов на поздние, которое не меняет

суммарного дохода. В свою очередь заметим, что график доходов без выплат совпадает с графиком из первого пункта за исключением выплат безвозмездной пенсии. Таким образом, суммарный доход Константина составит  $900000 - 200000 = 700000$  долларов (мы вычли из суммарного дохода пункта а) площадь, которая приходилась на пенсию пункта а). Тогда ежегодное потребление составит  $700000/60 = 11666,67$  долларов в год.

*Критерии:*

*2 балла за правильный график*

*3 балла за нахождение отчислений*

*3 балла за нахождение суммарного дохода*

*с. Предлагается ставить по 2 балла за каждое логичное объяснение*